BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ГАРАНТИРОВАННАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА С УСИЛЕННЫМ НЕРАВЕНСТВОМ ТРЕУГОЛЬНИКА

А.Б. РАМАЗАНОВ

Бакинский Государственный Университет

В работе впервые найдена улучшенная и параметризированная гарантированная оценка точности градиентного алгоритма для задачи коммивояжера с усиленным неравенством треугольника.

Нахождению гарантированных оценок точности приближенных (градиентных) алгоритмов для модельных задач дискретной оптимизации - задач коммивояжера посвящены многочисленные работы [1] (см. там же библиографию). Важным направлением в этих исследованиях является улучшение гарантированных оценок. Улучшение этих оценок не всегда возможно (см., например, [1-3]). Однако, для специальных задач коммивояжера гарантированные оценки приближенных (градиентных) алгоритмов могут быть улучшены (см., напр., [1,2]). Так, например, в работе [2] улучшена гарантированная оценка точности приближенного алгоритма, предложенного Кристофидесом для задачи коммивояжера с усиленным неравенством треугольника.

В настоящей работе впервые найдена улучшенная и параметризированная гарантированная оценка точности градиентного алгоритма для задачи коммивояжера с усиленным неравенством треугольника. Эти оценки улучшают ранее полученные аналогичные оценки из [1,3]. Также найдено условие совпадения оптимального и градиентного значений целевой функции (следствие 2) и попутно повторно опровергнута известная гипотеза о том, что в задачах коммивояжера получить гарантированную оценку градиентного алгоритма, строго меньшую 2, не- возможно (следствие 1). Эта гипотеза ранее с помощью модификации (за счет увеличения трудоемкости) градиентного алгоритма была неоднократно опровергнута другими авторами (см., например, [3]).

В работе будем пользоваться обычной графовой терминологией [4]. Пусть $G=(VG,EG)$ полный n-вершинный граф, где VG - множество вершин, а EG - множество ребер графа G. Гамильтоновым циклом в графе $G=(VG,EG)$ называется цикл, содержащий каждую вершину из G

точно один раз. Каждому ребру $(i,j) \in EG$ сопоставлено неотрицательное число $f(i,j)$ (стоимость, длина, вес и т.д.). Через $F(EG'), EG' \subseteq EG$ будем обозначать суммарный вес ребер из EG'. Если для $1/2 \le \beta \le 1$ весовые функции $f(i,j)$ ребер графа $G = (VG, EG)$ удовлетворяют неравенствам

$$f(i,j) \le \beta(f(i,k) + f(k,j)), \forall i,j,k \in VG, i \ne j, j \ne k, \tag{1}$$

то будем говорить , что граф G удовлетворяет усиленному неравенству треугольника. При $1/2 < \beta < 1$ это определение совпадает с определением усиленного неравенства треугольника, введенного в [2]. При $\beta = 1$ неравенство (1) превращается в обычное неравенство треугольника. Если же $\beta = 1/2$, то весовые функции графа $G = (VG, EG)$ удовлетворяют условию порядковой выпуклости [1,5].

С учетом неравенства (1) введем усиленную метрическую задачу коммивояжера (УМЗК). УМЗК на максимум назовем задачу нахождения гамильтонова цикла максимального веса в G, когда для весовых функций $f(i,j)$ ребер выполняются неравенства (1). При $\beta = 1$ УМЗК превращается в метрическую задачу коммивояжера (МЗК) [1, 4].

Множество гамильтоновых циклов графа G обозначим через $U = \{(VU, EU) : VU = VG, EU \subseteq EG\}$. Оптимальным решением УМЗК на максимум называется такое $U^* \in U$, что

$$F(U^*) = \sum_{(i,j)\in EU^*} f(i,j) \ge F(\overline{U}) = \sum_{(i,j)\in E\overline{U}} f(i,j), \forall \overline{U} \in U.$$

Подмножество $T \subseteq EG$ ребер в G называется частичным туром, если существует гамильтонов цикл, содержащий все ребра из T , т.е. истинна импликация $(\exists H \in U) \Rightarrow (EH = T)$. Ребро $e \in EG$ называется допустимым для частичного тура *T*, если $T \cup \{e\}$ частичный тур. Под градиентным решением УМЗК на максимум понимается решение, полученное с помощью следующего итерационного процесса [1]:

Шаг *i*, *i*=1,…, *n*. Выбираем ребро e_i, имеющее максимальный вес среди допустимых ребер для частичного тура T_{i-1} ($T_0 = \varnothing$) и полагаем $T_i = T_{i-1} \cup \{e_i\}$. Гамильтонов цикл T_n называем градиентным и обозначаем через U^g .

Под гарантированной оценкой точности градиентного алгоритма решения УМЗК на максимум как обычно, понимается такое число $\varepsilon \ge 0$, что $F(U^*)/F(U^g) \le \varepsilon$.

Теорема 1. Для УМЗК на максимум справедлива следующая гарантированная оценка точности градиентного алгоритма

$$F(U^*)/F(U^g) \le 4\beta/(1+2\beta). \tag{2}$$

Доказательство. Для доказательства применим методику, предложенную в [1]. Не умаляя общности будем считать, что n – четно и $n > 2$. Пусть $M = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_k, j_k)\}$ - паросочетание (т.е. подмножество попарно несмежных ребер) максимального веса в графе G.

Пусть $k = n/2$ - четно. Тогда выбираем в качестве T_1, T_2, T_3, T_4 частичные туры следующего вида:

$$T_1 = \{(i_1, j_1), (j_1, j_2), (j_2, i_2), (i_2, i_3), ..., (j_k, i_k), (i_k, i_1)\} ,$$

$$T_2 = \{(j_1, i_1), (i_1, i_2), (i_2, j_2), (j_2, j_3), ..., (i_k, j_k), (j_k, j_1)\} ,$$

$$T_3 = \{(i_1, j_1), (j_1, i_2), (i_2, j_2), (j_2, i_3), ..., (i_k, j_k), (j_k, i_1)\} ,$$

$$T_4 = \{(j_1, i_1), (i_1, j_2), (j_2, i_2), (i_2, j_3), ..., (j_k, i_k), (i_k, j_1)\} .$$

Очевидно, что $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 = M$. Из неравенства (1), выводим

$$f(i_l, j_l) \le \beta(f(i_l, i_{l+1}) + f(j_l, i_{l+1})),$$

$$f(i_l, j_l) \le \beta(f(i_l, j_{l+1}) + f(j_l, j_{l+1})), \; l = 1,2,...,k .$$

Суммируя эти неравенства по всем $l = 1,2,...,k$ и учитывая $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 = M$, имеем

$$2F(M) \le \beta(F(T_1 \setminus M) + F(T_2 \setminus M) + F(T_3 \setminus M) + F(T_4 \setminus M)) =$$

$$\beta(F(T_1) + F(T_2) + F(T_3) + F(T_4) - 4F(M))$$

Отсюда, учитывая, что

$$F(M) \ge F(U^*)/2 , \quad F(T_i) \le F(U^g), \; i = 1,2,3,4,$$

получаем

$$4\beta F(U^g) \ge (1 + 2\beta)F(U^*) ,$$

т.е.

$$F(U^*)/F(U^g) \le 4\beta/(1 + 2\beta) .$$

Пусть $k = n/2$ - нечетно. Не умаляя общности будем считать, что $f(i_{k-1}, j_{k-1}) \ge f(i_l, j_l)$, $l = 1,2,...,k$.

Тогда выбираем в качестве T_1, T_2, T_3, T_4 частичные туры следующего вида:

$$T_1 = \{(i_1, j_1), (j_1, j_2), (j_2, i_2), (i_2, i_3), ..., (j_{k-`1}, i_{k-1}), (i_{k-1}, j_k), (j_k, i_k\}, (i_k, i_1)\} ,$$

$$T_2 = \{(j_1, i_1), (i_1, i_2), (i_2, j_2), (j_2, j_3), ..., (i_{k-1}, j_{k-1}), (j_{k-1}, j_k), (j_k, i_k), (i_k, j_1)\} ,$$

$$T_3 = \{(i_1, i_1), (j_1, i_2), (i_2, j_2), (j_2, i_3), ..., (i_{k-1}, j_{k-1}), (j_{k-1}, j_k), (j_k, i_k), (i_k, i_1)\} ,$$

$$T_4 = \{(j_1, i_1), (i_1, j_2), (j_2, i_2), (i_2, j_3), ..., (j_{k-1}, i_{k-1}), (i_{k-1}, j_k), (j_k, i_k), (i_k, j_1)\} .$$

В T_1, T_2, T_3, T_4 по два раза встречаются ребра $(i_1, i_k), (j_1, i_k), (i_{k-1}, j_k), (j_{k-1}, j_k)$. Поэтому из неравенства (1) и в силу предположения $f(i_{k-1}, j_{k-1}) \ge f(i_l, j_l)$, $l = 1,2,...,k$, получаем

$\beta(f(i_l, j_{l+1}) + f(i_l, i_{l+1})) \geq f(i_{l+1}, j_{l+1}),\ \beta(f(j_l, i_{l+1}) + f(j_l, j_{l+1})) \geq f(i_{l+1}, j_{l+1}),$

$\beta(f(i_1, i_k) + f(j_1, i_k)) \geq f(i_1, j_1),\ \beta(f(i_{k-1}, j_k) + f(j_{k-1}, j_k)) \geq f(i_{k-1}, j_{k-1}) \geq f(i_k, j_k),$

$l = 1,2,...,k-2.$

Суммируя эти неравенства и учитывая $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 = M$, имеем

$$2F(M) \leq \beta(F(T_1 \setminus M) + F(T_2 \setminus M) + F(T_3 \setminus M) + F(T_4 \setminus M)) =$$

$$\beta(F(T_1) + F(T_2) + F(T_3) + F(T_4) - 4F(M))$$

Отсюда, учитывая, что

$F(M) \geq F(U^*)/2$, $F(T_i) \leq F(U^g)$, $i = 1,2,3,4,$

получаем

$$4\beta F(U^g) \geq (1+2\beta)F(U^*),$$

т.е.

$$F(U^*)/F(U^g) \leq 4\beta/(1+2\beta).$$

Таким образом, для четного и нечетного *k* оценка (2) доказана. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Следствие 1. Для УМЗК на максимум при $1/2 < \beta < 1$ справедливо неравенство

$$F(U^*)/F(U^g) < 2.$$

Следствие 1 еще раз позволяет опровергнуть гипотезу о том, что получить гарантированные оценки строго меньше 2 градиентного алгоритма для задачи коммивояжера на максимум невозможно (ранее с помощью модификации градиентного алгоритма эта гипотеза была опровергнута другими авторами (см., например [3])).

Следствие 2. Если $\beta = 1/2$, то справедливо равенство $F(U^*) = F(U^g)$.

Следствие 3. При $\beta = 1$ справедлива следующая гарантированная оценка точности градиентного алгоритма для УМЗК на максимум

$$F(U^*)/F(U^g) \leq 4/3.$$

Оценка из следствия 3 совпадает с аналогичными оценками ранее полученными в [1].

С учетом следствия 2 непосредственно можно сформулировать следующее достаточное условие совпадение оптимального и градиентного значение целевой функции для УМЗК.

Теорема 2 . Для совпадения оптимального и градиентного значения целевой функции в УМЗК достаточно, чтобы весовые функции удовлетворяли условию порядковой выпуклости.

Замечание. Оценку (2) можно рассматривать как параметризированную по β. Меняя β в промежутке [½,1] можно получить ранее известные многие гарантированные оценки градиентного алгоритма (см. [1]). При этом крайним ($\beta = 1/2$, $\beta = 1$) и внутренним ($1/2 < \beta < 1$) значениям параметра β соответствуют новые качественные результаты – совпадение оптимального и градиентного значения целевой функции (следствие 2), получение или улучшение ранее известных оценок и попутно опровержение известной гипотезы (следствие 1 и 3) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации. – Изд-во БГУ, Минск, 1987.
2. H.Joachim, J.Hromkovic, R.Klasing, S.Sebastion, U.Walter // Boekenhauer. Inf. Process. Lett. 2000, 75, N3, pp. 133-138.
3. Kovalev M., Kotov V. // 30 Inter. Wiss. Koll. Ilmenau: TH, 1985. S. 53-56.
4. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М. , 1990.
5. Emelichev V.A., Kovalev M.M., Ramazanov A.B. // J. Discrete Mathematics and Applications.- 1992.- vol. 2, N 2, pp. 119-131.

GÜCLƏNDİRİLMİŞ ÜÇBUCAQ BƏRABƏRSİZLİKLİ KOMMİVOYAJOR MƏSƏLƏSİ ÜÇÜN QRADİYENT ALQORİTMİN QARANTİYALI QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

Ə.B. RAMAZANOV

ANNOTASİYA

İlk dəfə gücləndirilmiş üçbucaq bərabərsizlikli kommivoyajor məsələsi üçün qradiyent alqoritmin daha dəqiq parametrləşmiş qarantiyalı qiymətlənməsi tapılmışdır.

GUARENTEE ESTIMATE ERROR OF GRADIENT ALGORITHM FOR TRAVELING SALESMAN PROBLEM WITH SHARPENED TRIANGLE INEQUALITY

A.B. RAMAZANOV

ABSTRACT

In the present paper new on improvements and parametric guarentee estimate error of gradient algorithm for traveling salesman problem with sharpened triangle inequality have been found.